Haliç Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü
Math 103 Lineer Cebir Dersi Ara Sınavı

Çözümler

Hazırlayan: Yamaç Pehlivan

BİRİNCİ KISIM

---

1. **Doğru yanıt:** b

---

2. **Doğru yanıt:** c

   Çünkü ikinci satır ikinci sütundaki pivot elemanın altındaki rakam sıfır değil.

---

3. **Doğru yanıt:** b

   Son satıra karşılık gelen denklem

   $$0.x + 0.y + 0.z = 1$$

   denklemine şeklindedir ki bu da çözüm olmadığı anlamına gelir.

---

4. **Doğru yanıt:** b

   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ formülünde $B = A$ alırsak $(AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$ buluruz. Yani cevap $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ olarak bulunur.

---

5. **Doğru yanıt:** b

   Çünkü $a = b = 2$ olduğunda üçüncü satır ikinci satırın iki katıdır.

---

6. **Doğru yanıt:** d

   Tüm seçenekleri sınıfta tartışmıştık.

---

7. **Doğru yanıt:** a

   2×2 antisimetrik matrisler $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Bu matrisler bütün 2×2 matrislerin alt vektör uzayını oluştururlar. Bunu görmek için şu iki yoldan birini kullanabiliriz:

   1. Yol: Bu tür matrisleri $b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde yazabiliriz ki bu da $Sp\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ olduğundan bu matrislerin kümesi, bütün 2×2 matrislerin alt vektör uzayı olur.

   2. Yol: Bu matrislerin toplama ve sayı ile çarpma işlemine göre kapalı olup olmadığı sorularını sorarız. Kolayca görülebileceği gibi her iki sorunun yanıtı da evet olur.

---

8. **Doğru yanıt:** a

   Her iki vektörün de üçüncü bileşenleri sıfır olduğundan, bunları bütün lineer bileşimlerinin üçüncü bileşenleri de sıfır olacaktır.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

9. **Doğru yanıt:** c

   Verilen matrislerin bu M_{22} uzayını gerebilmesi için, 2×2 bütün matrisleri bu verilen matrisler cinsinden yazabilmeliyiz. (a) ve (b) şıklarındaki matrislerle bunu yapamayacağımız aşikardır. (d) şıkkındaki matrislerle 2. satır 1. sütun elemanı sıfırdan farklı olan bir matris yazamayız. Zaten bu şıktaki ilk iki matris ile son iki matris lineer bağımlıdır. Benzer şekilde (e) şıkkındaki matrislerle de 1. satır 2. sütun elemanı sıfırdan farklı olan matris yazamayız. Bu şıktaki matrislerden de ikinci ve üçüncü matrisler lineer bağımlıdır. Ancak (e) şıkkındaki matrisleri kullanarak 2×2 her matrisi yazabiliriz.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

---

10. **Doğru yanıt:** a ve d (bu soruda yanlışlıkla iki doğru yanıt verilmiştir.)

    Bir elemanın

$$v_1 = \cos^2(t) \qquad v_2 = \sin^2(t)$$

   tarafından gerilen vektör uzayında, yani $Sp\{v_1, v_2\}$ içinde yer alabilmesi için v_1 ve v_2'nin lineer bileşimi olarak yazılabilmesi gerekir. (a) şıkkındaki $sin(t)$ ve (d) şıkkındaki $sin(2t)$ ifadeleri bu şekilde yazılamaz ama diğer şıklardaki elemanlar yazılabilirler:

$$cos(2t) = v_1 - v_2 \qquad 1 = v_1 + v_2 \qquad 3 = 3v_1 + 3v_2 \qquad 0 = 0v_1 + 0v_2$$

İKİNCİ KISIM

---

11. Bu denklem sistemini $AX = B$ şeklinde yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A^{-1}'i şöyle buluruz: Önce

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini oluştururuz. Şimdi birinci satırı -1 ile çarpıp ikinci satıra ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de ikinci satırı -2 ile bölelim.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Son olarak ikinci satırı -1 ile çarpıp birinci satıra ilave edelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Buradan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

buluruz. $A^{-1}B$ matrisini oluşturarak

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

denklem sisteminin çözümünü

$$x = 4 \qquad y = 1$$

şeklinde buluruz.

---

12. Bu matrisleri şöyle ayırabiliriz:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

öyle ki

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{21} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda

$$AB = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

olacağından, ilk çarpım işlemini bir bilgisayar, ikinciyi de diğer bir bilgisayar yapabilir.

---

13. Bu polinomlar lineer olarak bağımsızdır çünkü

$$\alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) = \alpha_1 t^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)t + (\alpha_1 - 3\alpha_2) = 0$$

yazarsak bunun mümkün olan tek çözümü $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ olur.

---

14. Bu vektörler $\mathbb{R}^3$ uzayını germez çünkü üçüncü bileşeni sıfır olmayan bir vektörü bunlar cinsinden yazamayız. Örneğin

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektörünü verilen vektörler cinsinden yazmamıza olanak yoktur.

---

15. $Sp\{M_1, M_2\}$ içinde yer alan vektörler $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2$ şeklinde yazılabilen vektörlerdir.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_1 + M_2$$

$Sp\{M_1, M_2\}$ içinde yer alır.

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$Sp\{M_1, M_2\}$ içinde yer almaz.