Haliç Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü
Math 103 Lineer Cebir Ödev Çözümü ve Puan Cetveli

1. Ödevin Çözümü ve Puan Cetveli

1. **Sorunun Çözümü:** Ben A ve B matrislerini şu şekilde seçiyorum:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu matrisleri çarparak aşağıdaki 2×4 matrisi bulurum:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin transpozunu alarak da

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & -8 \\ 10 & 14 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

bulurum. Öte yandan

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & -8 \\ 10 & 14 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

olur ki buradan da $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu görüyoruz.

Değerlendirme:

- A ve B matrislerini çaparak AB'yi oluşturmak 1 puan.
- $(AB)^T$ matrisini oluşturmak 1 puan.
- B^T ve A^T matrislerini oluşturmak 1'er puan.
- $B^T A^T$ matrisini oluşturmak 1 puan.
- Bu soruda amaç, $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu göstermek olduğundan, işlem hatası nedeniyle bile olsa sonucu $(AB)^T = B^T A^T$ olarak bulmayan öğrenciler hiç puan alamayacaklardır.

`2.` `Sorunun Çözümü:` Ben şöyle bir matris seçiyorum:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisin tersini bulmak için öncelikle aşağıdaki ilaveli matrisi otuşturuyorum:

$$[A|I_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de elemanter satır işlemleri ile bu matrisin sol tarafını birim matrise dönüştüreceğim:

$$\begin{aligned} (\text{Birinci satır}) \times (-1) + (\text{üçüncü satır}) &= (\text{yeni üçüncü satır}) \\ (1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0) \times (-1) + (1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 1) &= (0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 1) \end{aligned}$$

$$[A|I_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{İkinci satır}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) &= (\text{yeni ikinci satır}) \\ (0\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0) \times \left(\frac{1}{3}\right) &= \left(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{3}\ \ 0\right) \end{aligned}$$

$$[A|I_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{Üçüncü satır}\right) \times (-1) + (\text{birinci satır}) &= (\text{yeni birinci satır}) \\ (0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 1) \times (-1) + (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0) &= (1\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ -1) \end{aligned}$$

$$[A|I_3] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buradan A^{-1} matrisini

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulurum.

`Değerlendirme:`

- 3×3 tipindeki A matrisinden 3×6 tipindeki $[A|I_3]$ ilaveli matrisini oluşturmak 1 puan.
- Elemanter satır işlemleri ile bu matrisin sol tarafını birim matrise dönüştürmek 3 puan.
- Bu matrisin sağ tarafının A^{-1} olduğunu belirtmek (yani benim yukarıda yaptığım gibi $A^{-1} = \ldots$ diye yazmak) 1 puan. Seçtiği matris singüler çıkan öğrenciler de bunu belittikleri taktirde 1 puanı buradan alacaklardır.
- Bu soruda işlem hatasından puan kırılmayacaktır.