Haliç Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü
Math 103 Lineer Cebir Ödev Çözümü
3. Ödevin **Çözümü**

1. Sorunun Çözümü: Ben şu iki vektörü seçiyorum:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Bu vektörlerin Euclidean iç çarpımı şöyledir:

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1$$

b) Bu vektörlerin W tarafından yaratılan iç çarpıma göre çarpımları da şöyledir:

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7$$

Değerlendirme: Çözümünüz soruda tarif edildiği gibi değerlendirilecektir.

2. Sorunun Çözümü: Ben şöyle bir matrisler seçtim:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu durumda

$$\langle M_1, M_1 \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times (-2)(-2) + 1 \times 1 = 11$$
$$\|M_1\| = \sqrt{\langle M_1, M_1 \rangle} = \sqrt{11}$$

$$\langle M_2, M_2 \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times (-1)(-1) + 1 \times 1 = 5$$
$$\|M_2\| = \sqrt{\langle M_2, M_2 \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\langle M_1, M_2 \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times (-2)(-1) + 1 \times 1 = 7$$

Buradan

$$\cos\theta = \frac{\langle M_1, M_2 \rangle}{\|M_1\| \|M_2\|} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{5}} =$$

$$\theta = \arccos(0.94) = 20^\circ$$

buluruz. Dikkat ederseniz seçtiğim M_1 ve M_2 matrisleri birbirlerine benzediği için aralarındaki açı da küçük çıktı.

`Değerlendirme:` $\langle M_1, M_2 \rangle$ çarpımını alma ve $\|M_1\|$ ve $\|M_2\|$ değerlerini bulma işlemi 1'er puan, açıyı hesaplamak 2 puandır. İşlem hatasından 1 puan kırılacaktır.

`3. Sorunun Çözümü:` Ben şu $\vec{r}_2$ vektörünü şu şekilde seçtim:

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt yöntemini iki adımda uygulayacağım.

1. Adım:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|}$$

$$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Bu durumda

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

2. Adım:

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1}{\|\vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1\|}$$

$$\langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Bu vektörün boyunu

$$\|\vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1\| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

olarak buluruz. Buradan da

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1}{\| \vec{r}_2 - \langle \vec{r}_2, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 \|} = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Bulduğumuz vektörlerin birbirlerine ortogonal olup olmadığını kontrol edelim:

$$\langle \hat{e}_1, \hat{e}_2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = 0$$

Buradan bu vektörlerin birbirlerine ortogonal olduğunu görmüş oluyoruz.

Değerlendirme: Birinci adım 1 puan ve ikinci adım 3 puandır. İşlem hatasından 1 puan kırılacaktır. Bu soruda yaptığınız işlemi şekil üzerinde göstermeniz de gerekmektedir ve bu da 1 puandır. Ben ne yazık ki burada şekil çizemiyorum ancak bu şekli derste pek çok defa çizmiştik.