Haliç Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü
Math 103 Lineer Cebir Dersi Final Sınavı

8 Ocak 2008

Hazırlayan: Yamaç Pehlivan

Başlama saati:	14:10
Bitiş Saati:	15:50
Toplam Süre:	100 Dakika

Lütfen adınızı ve soyadınızı aşağıdaki kutuya yazınız, verilen bilgileri dikkatle okuyunuz ve size söylendiğinde bu sayfayı çevirerek sınava başlayınız.

Adınız Soyadınız	ÇÖZÜMLER		
İmzanız		Kod	

1. Bu sınav iki kısımdan ve toplam 15 sorudan oluşmaktadır ve 7 sayfa uzunluğundadır. Lütfen soruları çözmeye başlamadan önce bunu kontrol ediniz.

2. İlk kısımda her biri 5 puan değerinde 10 adet test sorusu bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını 4. sayfada cevaplar için ayrılmış bölüme yazınız. Bu kısımdaki bir sorudan puan alabilmeniz için yanıtınızı açık ve okunaklı bir biçimde cevap bölümüne yazmanız gerekmektedir. Soru üzerinde işaretlenmiş bir yanıt veya sorunun kenarına yazılmış bilgiler değerlendirilmeyecektir. Bu kısmın toplam değeri 50 puandır.

3. İkinci kısımda her biri 10 puandan oluşan 5 soru bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını sorunun altında boş bırakılan kısma yazınız. Yanıtınız için ek kağıt kullanmanıza izin verilmeyecektir. Eğer yanıtınız bu boşluğa sığmayacak kadar uzunsa (ki bu durumda büyük ihtimalle doğru yolda değilsiniz demektir) sınav kağıdınızın en arkasındaki boşluğu kullanabilirsiniz.

4. Bu sınavda hesap makinesi kullanmanıza izin verilmeyecektir.

5. Sınav sırasında, önceden kendi el yazınız ile hazırlamış olduğunuz çizgisiz A4 tipinde bir formül kağıdını kullanmanıza izin verilecektir. Her öğrenci sadece kendi formül kağıdını kullanabilir.

6. Sınavın ilk 20 dakikasında ve son 10 dakikasında sınıftan kimsenin çıkmasına izin verilmeyecektir.

7. Sınav süresi sona erdiğinde lütfen bu kitapçığı görevli kişiye teslim ediniz. Sınav soruları çözümleri ile birlikte sınavın bitiminde öğrencilere dağıtılacaktır.

8. Lütfen sınav sırasında diğer öğrencilerin dikkatini dağıtabilecek davranışlardan kaçınınız.

BİRİNCİ KISIM

Bu kısımda her biri 5 puan değerinde 10 adet test sorusu bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını 4. sayfada cevaplar için ayrılan bölüme yazınız.

---

1. Euclidean iç çarpımına göre

$$\overrightarrow{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin iç çarpımı nedir?

a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{10}$ e) 0

---

2. Euclidean iç çarpımına göre aşağıdakilerden hangisi $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorune diktir?

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

---

3. Derecesi n ve n'den küçük olan polinomların oluşturduğu vektör uzayında şöyle bir iç çarpım tanımlanmış olsun:

$$\langle p_1(t), p_2(t) \rangle = \int_0^1 t^n p_1(t) p_2(t) dt.$$

Bu iç çarpıma göre $p(t) = t$ polinomunun boyu (normu) aşağıdakilerden hangisidir?

a) $1/(n+3)$ b) $1/\sqrt{n+3}$ c) 3 d) $1/3$ e) $1/\sqrt{3}$

---

4. Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ uzayında bir iç çarpım olamaz?

   a) $\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = x_1x_2 - y_2y_2$ b) $\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$

   c) $\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$ d) $\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}y_1y_2$

   e) Hepsi olabilir.

---

5. $\mathbb{R}^2$ uzayını y yönünde 3 kat genişlettiğimizi ve ardından da x-eksenine göre yansıma işlemini yaptığımızı düşünelim. Bu dönüşüme karşılık gelen matris aşağıdakilerden hangisidir?

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer donüşümünün $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ tabanı üzerine etkisinin şu şekilde verildiğini düşünelim:

$$T : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad T : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Bu durumda T dönüşümü $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorünü aşağıdakilerden hangisine götürür?

   a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

7. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   matrisi ile verilen lineer dönüşümün görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

   a) xz-düzlemi. b) $x = y = z$ dogrusu. c) x-ekseni. d) y-ekseni.

   e) yz-düzlemi.

8.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$
matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 18 b) -18 c) 16 d) -16 e) 0

9.
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
matrisinin a_{32} elemanına ait kofaktör aşağıdakilerden hangisidir?

a) 15 b) -15 c) 9 d) -9 e) 6

10.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2 b) -2 c) 1 d) -1 e) 0

Cevaplar									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	B	A	D	C	E	E	D	A

İKİNCİ KISIM

Bu kısımda her biri 10 puan değerinde 5 adet soru bulunmaktadır. Şıklı olmayan sorularda kısmi puan verilmeyecektir. Şıklı sorularda ise kısmi puan şıkların başlarında belirtildiği şekilde verilecektir. Bu soruların yanıtlarını sorunun altında boş bırakılan kısma yazınız. Yanıtınız için ek kağıt kullanmanıza izin verilmeyecektir. Eğer yanıtınız bu boşluğa sığmayacak kadar uzunsa (ki bu durumda büyük ihtimalle doğru yolda değilsiniz demektir) sınav kağıdınızın en arkasındaki boşluğu kullanabilirsiniz. Bu kısımdaki sorularda işlem hatasından %50 puan kırılacaktır. Sonucunuzu kontrol etmeyi unutmayınız.

11. $\mathbb{R}^2$ uzayında saatin tersi yönde 45° dönme operasyonunu ele alalım.

a) (5 puan) Bu dönüşümün matrisini yazınız.

b) (5 puan) Bu dönüşümü $\overrightarrow{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektörüne uygularsak ne elde ederiz?

Yanıt:

$$a) \quad D_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

12. $\overrightarrow{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ve $\overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ uzayında $\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$ şeklinde bir iç çarpım tanımlamış olsun. Bu iç çarpıma göre

$$\overrightarrow{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektörleri arasındaki açı nedir?

Yanıt:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle &= 2.1.1 + 1.1 + 4.1.0 = 3 \\
\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \rangle &= 2.1.1 + 1.1 + 4.1.1 = 7 \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{r}_1\| = \sqrt{6} \\
\langle \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_2 \rangle &= 2.1.1 + 1.1 + 4.0.0 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{r}_2\| = \sqrt{3} \\
\cos(\theta) &= \frac{\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle}{\|\overrightarrow{r}_1\|\|\overrightarrow{r}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{7}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}
\end{aligned}$$

13. $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vektölerinden başlayarak Gram Schmidt yöntemi ile ortonormal iki vektör elde ediniz.

Yanıt:

$$\text{1. Adım:} \qquad \widehat{e}_1 = \frac{\overrightarrow{r}_1}{\|\overrightarrow{r}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Adım:} \qquad \widehat{e}_2 = \frac{\overrightarrow{r}_2 - \langle \overrightarrow{r}_2, \widehat{e}_1 \rangle \widehat{e}_1}{\|\overrightarrow{r}_2 - \langle \overrightarrow{r}_2, \widehat{e}_1 \rangle \widehat{e}_1\|}$$

$$\langle \overrightarrow{r}_2, \widehat{e}_1 \rangle = 2$$

$$\overrightarrow{r}_2 - \langle \overrightarrow{r}_2, \widehat{e}_1 \rangle \widehat{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bu vektörün boyu $= 3$

$$\widehat{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilsin.

a) (5 puan) Bu lineer dönüşümün çekirdeği nedir?

b) (5 puan) Bu çekirdek uzay kaç boyutludur?

Not: Bu soruda b şıkkından puan alabilmek için a şıkkını doğru yanılamış olmanız gerekmektedir.

Yanıt:

$$a) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bunu sıfıra eşitlersek

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

çekirdeğin $y = z = 0$ bölgesi olduğunu görürüz.

$$\text{Çekirdek} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Çekirdek sadece x-eksenidir yani 1 boyutlu bir uzaydır.

15. Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ -x + y + z &= 2 \\ 5y + z &= 2 \end{aligned}$$

sistemini göz önüne alalım. Cramer yöntemini kullanarak, diğer değişkenleri bulmadan sadece z'yi hesaplayınız.

Yanıt:

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-2} = 7$$