Haliç Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Bölümü
Math 103 Lineer Cebir Dersi Final Sınavı

31 Aralık 2007

Hazırlayan: Yamaç Pehlivan

Başlama saati:	12:00
Bitiş Saati:	13:40
Toplam Süre:	100 Dakika

Lütfen adınızı ve soyadınızı aşağıdaki kutuya yazınız, verilen bilgileri dikkatle okuyunuz ve size söylendiğinde bu sayfayı çevirerek sınava başlayınız.

Adınız Soyadınız	ÇÖZÜMLER		
İmzanız		Kod	

1. Bu sınav iki kısımdan ve toplam 15 sorudan oluşmaktadır ve 7 sayfa uzunluğundadır. Lütfen soruları çözmeye başlamadan önce bunu kontrol ediniz.
2. İlk kısımda her biri 5 puan değerinde 10 adet test sorusu bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını 4. sayfada cevaplar için ayrılmış bölüme yazınız. Bu kısımdaki bir sorudan puan alabilmeniz için yanıtınızı açık ve okunaklı bir biçimde cevap bölümüne yazmanız gerekmektedir. Soru üzerinde işaretlenmiş bir yanıt veya sorunun kenarına yazılmış bilgiler değerlendirilmeyecektir. Bu kısmın toplam değeri 50 puandır.
3. İkinci kısımda her biri 10 puandan oluşan 5 soru bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını sorunun altında boş bırakılan kısma yazınız. Yanıtınız için ek kağıt kullanmanıza izin verilmeyecektir. Eğer yanıtınız bu boşluğa sığmayacak kadar uzunsa büyük ihtimalle doğru yolda değilsiniz demektir.
4. Bu sınavda hesap makinesi kullanmanıza izin verilmeyecektir.
5. Sınav sırasında, önceden kendi el yazınız ile hazırlamış olduğunuz çizgisiz A4 tipinde bir formül kağıdını kullanmanıza izin verilecektir. Her öğrenci sadece kendi formül kağıdını kullanabilir.
6. Sınavın ilk 20 dakikasında ve son 10 dakikasında sınıftan kimsenin çıkmasına izin verilmeyecektir.
7. Sınav süresi sona erdiğinde lütfen bu kitapçığı görevli kişiye teslim ediniz. Sınav soruları çözümleri ile birlikte sınavın bitiminde öğrencilere dağıtılacaktır.
8. Lütfen sınav sırasında diğer öğrencilerin dikkatini dağıtabilecek davranışlardan kaçınınız.

BİRİNCİ KISIM

Bu kısımda her biri 5 puan değerinde 10 adet test sorusu bulunmaktadır. Bu soruların yanıtlarını 4. sayfada cevaplar için ayrılan bölüme yazınız.

---

1. Euclidean iç çarpımına göre

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin iç çarpımı nedir?

a) 0 b) $3\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 27 e) 8

---

2. Aşağıdakilerden hangisi Euclidean iç çarpımına göre normalize bir vektör değildir?

a) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -2/3 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

3. Aşağıdaki matrislerden hangisi $\mathbb{R}^3$ uzayında xz-düzlemine izdüşüm alma matrisidir?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi $\mathbb{R}^2$ uzayında nasıl bir lineer dönüşüme karşılık gelir?

a) x-eksenine göre yansıtır. b) y-eksenine göre yansıtır.

c) x-eksenine izdüşüm alır. d) y-eksenine izdüşüm alır.

e) Saatin tersi yönde 90° döndürür.

---

5. $\mathbb{R}^2$ uzayını x yönünde 2 kat genişlettiğimizi ve ardından y-eksenine göre yansıma işlemini yaptığımızı düşünelim. Bu dönüşüme karşılık gelen matris aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer donüşümünün $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ tabanı üzerine etkisi

$$T(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \quad \text{ve} \quad T(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$$

olarak verildiğini düşünelim. Bu durumda T dönüşümü $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorünü aşağıdakilerden hangisine götürür?

a) $\overrightarrow{i}$ b) $\overrightarrow{j}$ c) $2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ d) $3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ e) $3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$

---

7. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilen lineer dönüşümün görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) xy-düzlemi. b) $x = y$ dogrusu. c) x-ekseni. d) y-ekseni. e) z ekseni.

8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 14 b) 12 c) -12 d) 6 e) -6

9.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
matrisinin a_{23} elemanına ait kofaktör aşağıdakilerden hangisidir?

a) 24 b) -24 c) -18 d) 18 e) 0

10.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 24 b) -24 c) 3 d) -3 e) 0

Cevaplar									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	A	E	C	D	B	C	B	A

İKİNCİ KISIM

Bu kısımda her biri 10 puan değerinde 5 adet soru bulunmaktadır. Şıklı olmayan sorularda kısmi puan verilmeyecektir. Şıklı sorularda ise kısmi puan şıkların başlarında belirtildiği şekilde verilecektir. Bu soruların yanıtlarını sorunun altında boş bırakılan kısma yazınız. Yanıtınız için ek kağıt kullanmanıza izin verilmeyecektir. Eğer yanıtınız bu boşluğa sığmayacak kadar uzunsa büyük ihtimalle doğru yolda değilsiniz demektir. Bu kısımdaki sorularda işlem hatasından %50 puan kırılacaktır. Sonucunuzu kontrol etmeyi unutmayınız.

11. $\mathbb{R}^2$ uzayında

$$\overrightarrow{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

vektörleri arasında

$$\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlayabilir miyiz? Yanıtınızın nedenini açıklayınız.

İpucu: İç çarpımın tanımını hatırlayınız.

Yanıt: Bu bir iç çarpım olamaz. Bunun iki nedeni vardır.

1) Çünkü iç çarpımın tanımı gereği $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r} \rangle \geq 0$ olmalıdır. Oysa bir

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vektörünün kendisiyle iç çapımını alırsak

$$\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r} \rangle = 2xy$$

buluruz ki bu da her zaman pozitif değildir.

2) İç çarpımın tanımı gereği sadece ve sadece $\overrightarrow{r} = 0$ olduğnda $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r} \rangle = 0$ olmalıdır. Yani sadece 0 vektörünün boyu sıfır olmalıdır. Oysa

$$\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r} \rangle = 2xy$$

olduğu için, bilesenlerden sadece biri sıfır olduğunda da vektörün boyu sıfıra eşittir. Yani

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

şeklindeki vektörlerin de boyu sıfırdır.

Yanıtınızda bunlardan sadece birini belirtmeniz tam puan almanız için yeterlidir.

12. Derecesi n ve n'den küçük olan polinomların oluşturduğu vektör uzayında şöyle bir iç çarpım tanımlanmış olsun:

$$\langle p_1(t), p_2(t)\rangle = \int_0^1 p_1(t)p_2(t)dt.$$

Bu iç çarpıma göre $p_1(t) = t$ ve $p_2(t) = 1$ polinomlarinin arasındaki açıyı hesaplayınız.

Yanıt:

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1.1\, dt = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|1\| = 1$$

$$\langle t, t\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \|t\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle 1, t\rangle = \int_0^1 t dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, t\rangle}{\|1\| \cdot \|t\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 30^\circ$$

13. $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrislerinden başlayarak Gram-Schmidt yöntemi ile ortonormal iki vektör elde ediniz.

Yanıt:

1. Adım:$\|\overrightarrow{r}_1\| = 1$ olduğu için

$$\widehat{e}_1 = \frac{\overrightarrow{r}_1}{\|\overrightarrow{r}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Adım:

$$\widehat{e}_2 = \frac{\overrightarrow{r}_2 - \langle \widehat{e}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle \widehat{e}_1}{\|\overrightarrow{r}_2 - \langle \widehat{e}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle \widehat{e}_1\|}$$

$$\langle \widehat{e}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overrightarrow{r}_2 - \langle \widehat{e}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle \widehat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{r}_2 - \langle \widehat{e}_1, \overrightarrow{r}_2 \rangle \widehat{e}_1\| = 1$$

olduğu için de

$$\widehat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

buluruz.

Kontrol:

$$\langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

14. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü uç boyutlu uzaydaki bir vektörü

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi ile çarparak iki boyutlu bir vektöre dönüştüren lineer dönüşüm olsun.

a) (5 puan) Bu lineer dönüşümün çekirdeği nedir?

b) (5 puan) Bu çekirdek uzay kaç boyutludur?

Yanıt:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ z \end{pmatrix}$$

Bunu sıfıra eşitlersek

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

buluruz. Bunun çözümü

$$x = t \qquad y = t \qquad z = 0$$

olduğundan bu lineer dönüşümün çekirdeğini

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak buluruz. Bu $x = y$ doğrusudur.

b) Bu çekirdek uzayı bir boyutludur.

15. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

sistemini Cramer yöntemini kullanarak çözünüz.

Yanıt:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1$$